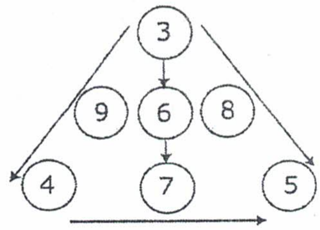
Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

CLASA a IV-a

Subiectul 1. Se consideră numerele 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 și figura de mai jos. Scrie aceste numere în cerculețe astfel încât urmând fiecare săgeată indicată în figură să obții aceeași sumă.

Soluție:



....7p

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Subiectul 2. Determinați numărul $\overline{ab}$ pentru care $a \times \overline{b00b} + \overline{aa} = 2024$.

(*Gazeta mathematică 5/2024*)

Soluție:

Din $\overline{b00b} < 2024$ se deduce că $b = 1$ sau $b = 2$. 1p

Pentru $b = 1$ se obține $a \times 1001 + a \times 11 = 2024$, deci $a \times 1012 = 2024$, $a = 2$

Numărul este $\overline{ab} = 21$ 4p

Pentru $b = 2$ se obține $a \times 2003 + a \times 11 = 2024$,

iar egalitate $a \times 2014 = 2024$ nu este posibilă pentru a număr natural. 1p

În concluzie, singurul număr care verifică egalitatea este $\overline{ab} = 21$. 1p

Subiectul 3. Trei saci cu varză cântăresc cât un sac cu cartofi. Cinci saci cu varză și doi saci cu cartofi cântăresc 154 kg. Află cât cântăresc împreună doi saci cu varză și un sac cu cartofi.

Soluție:

2 saci cu cartofi cântăresc cât 6 saci cu varză 2p

11 saci cu varză cântăresc 154 kg 1p

1 sac cu varză cântărește $154 : 11 = 14$ kg..2p

1 sac cu cartofi cântărește $14 \times 3 = 42$ kg 1p

2 saci cu varză și un sac cu cartofi cântăresc 70 kg 1p

Subiectul 4. Suma a patru numere naturale este 2025. Dacă pe primul număr îl înmulțim cu 2, pe al doilea îl mărim cu 2, din al treilea scădem 2, iar pe ultimul îl împărțim la 2, obținem patru numere naturale consecutive, în ordine crescătoare. Determină cele patru numere.

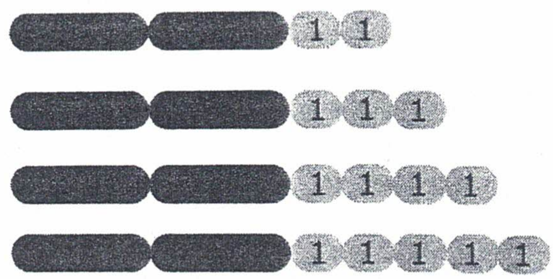
Soluția 1: Fie a, b, c, d cele patru numere. Avem: $b+2=2a+1; c-2=2a+2; d:2=2a+3$ 1p

$b=2a-1; c=2a+4; d=4a+6$ 2p

$a+b+c+d=2025 \Rightarrow a+2a-1+2a+4+4a+6=2025$ 1p

$9a+9=2025 \Rightarrow a=224; b=447; c=452; d=902.$ 3p

Soluția 2:



Dacă numerele consecutive sunt reprezentate astfel atunci
cele patru numere sunt reprezentate grafic astfel

Egalarea părților

9 părți .... $2025-(1+1+6+10)=2007$

1. Care este primul număr?

$$2007:9+1=224$$

2. Care este cel de al doilea număr?

$$223\times 2+1=447$$

3. Care este cel de al treilea număr?

$$223\times 2+6=452$$

4. Care este cel de al patrulea număr?

$$223\times 4+10=902$$

Concursul regional "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"

ediţia a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE CLASA A V-A

Subiectul 1. Prin împărţirea unui număr de patru cifre la răsturnatul său, se obţine câtul 2 şi restul 1977. Aflaţi numărul ştiind că diferenţa dintre cifra miilor şi cifra unităţilor este 5, iar cifra sutelor este cu 4 mai mare decât cifra zecilor.

(*Gazeta Matematică nr.5/2024*)

Soluţie: $\overline{abcd} = \overline{dcba} \cdot 2 + 1977$, cu $\overline{dcba} > 1977, a \neq 0, d \neq 0, a = d + 5, b = c + 4$ ....2 p

$1000a + 100b + 10c + d = 2000d + 200c + 20b + 2a + 1977$..1 p

$998a + 80b = 1999d + 190c + 1977$

$998(d + 5) + 80(c + 4) = 1999d + 190c + 1977$ ....2 p

$998d + 4990 + 80c + 320 = 1999d + 190c + 1977$

$1001d + 110c = 3333 \Rightarrow c = 3, d = 3, a = 8, b = 7 \Rightarrow \overline{abcd} = 8733$..2 p

Subiectul 2. Un joc de calculator funcţionează după următorul algoritm: la fiecare pas, se afişează pe ecranul monitorului un careu de forma unui pătrat împărţit în patru pătrăţele mai mici, cu un număr natural scris în fiecare din cele patru pătrăţele. După primii trei paşi ai algoritmului sunt afişate următoarele careuri:

Pasul 1:

1	3
7	5

Pasul 2:

9	11
15	13

Pasul 3:

17	19
23	21

a) Ce careu va fi afişat la pasul 6?

b) Calculaţi suma celor patru numere situate în careul de la pasul 2024.

c) Există un careu astfel încât suma numerelor situate în el să fie 2024? (justificaţi răspunsul!)

Soluţie: a) În sensul acelor de ceasornic, pornind din colţul din dreapta sus, se citesc în ordine numerele impare.

La pasul 6 va fi afişat careul

41	43
47	45

La pasul n va fi afişat careu

$8(n-1)+1$	$8(n-1)+3$
$8(n-1)+7$	$8(n-1)+5$

....1 p

b) Numerele din fiecare careu cresc cu 8 faţă de numerele din careul anterior, deci suma lor creşte cu 32 ....1 p

În primul careu suma numerelor este 32, în al doilea este $16 + 32 \cdot 1$. în careul k este $16 + 32 \cdot (k - 1)$ ....2 p

deci în careul de la pasul 2024 suma este $16 + 32 \cdot 2023 = 64752$ ....1 p

c) Pentru ca suma numerelor dintr-un careu să fie 2024 trebuie să existe k un număr natural pentru care are loc egalitatea $16 + 32 \cdot (k - 1) = 2024$. Atunci $32(k - 1) = 2008$ şi cum 2008 nu se împarte exact la 32, deducem că suma numerelor dintr-un careu nu poate fi 2024 ....2 p

Subiectul 3. În câte moduri distincte se poate scrie numărul 1000 ca sumă de numere naturale în a căror scriere în baza zece apare numai cifra 4 ? (Două sume care diferă numai prin ordinea termenilor nu se consideră a fi diferite).

Soluţie: Fie a numărul de numere de 4 folosite, b numărul de numere de 44 folosite şi c numărul de numere de 444 folosite. Avem $4a + 44b + 444c = 1000 \Leftrightarrow a + 11b + 111c = 250$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$..2 p

$\Rightarrow 111c \leq 250 \Rightarrow c$ poate fi 0,1, sau 2..1 p

Dacă $c = 0 \Rightarrow a + 11b = 250 \Rightarrow 11b \leq 250 \Rightarrow b \leq 22$, adică avem 23 de soluţii..1 p

Dacă $c = 1 \Rightarrow a + 11b = 139 \Rightarrow 11b \leq 139 \Rightarrow b \leq 12$, adică avem 13 soluţii..1 p

Dacă $c = 2 \Rightarrow a + 11b = 28 \Rightarrow 11b \leq 28 \Rightarrow b \leq 2$, adică avem 3 soluţii..1 p

Numărul de moduri distincte este $23 + 13 + 3 = 39$..1 p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 4. Un pătrat cu latura de 5 se împarte în pătrate cu latura de 1 și se numerotează de la 1 la 25. Se calculează sumele numerelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană. Există o numerotare astfel încât **exact** o sumă să fie număr par ?

Soluție: Notând $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ sumele pe linii, respectiv coloane obținem

$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = 2 \times suma\ numerelor = 650 = număr\ par$ ....2 p

Suma tuturor sumelor obținute prin adunarea numerelor de pe fiecare linie, respectiv de pe fiecare coloană, conține 10 termeni și este un număr par, ...2 p

dacă doar un termen (o sumă) este număr par, atunci celialți 9 termeni sunt numere impare, deci suma lor este un număr impar, cee ce constituie o contradicție (650 este par) ....2 p

Deci, nu există o numerotare astfel încât **exact** o sumă să fie număr par .... 1 p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282
Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A VI-A

Subiectul 1.

a) Arătați că $N=\overline{ab1}-\overline{1ab}$ nu poate fi număr prim, unde a și b sunt cifre nenule.

b) Determinați cifrele nenule a și b pentru care $N=\overline{ab1}-\overline{1ab}$ este cubul unui număr natural.

(*Gazeta Matematică nr. 4/2024*)

Soluție:

a) $N=9\cdot(10a+b-11)\vdots 9$, deci N nu poate fi prim. 2p

b) $N=9\cdot(10a+b-11)$ este cub perfect dacă $10a+b-11=3k^3, k\in\mathbb{N}$. Cum a și b sunt cifre, rezultă $k\in\{0,1,2,3\}$. 1p

Dacă $k=0\Rightarrow 10a+b=11\Rightarrow \overline{ab}=11\Rightarrow a=b=1$ și $N=0=0^3$. 1p

Dacă $k=1\Rightarrow \overline{ab}-11=3\Rightarrow \overline{ab}=14\Rightarrow a=1,b=4$ și $N=3^3$. 1p

Dacă $k=2\Rightarrow \overline{ab}-11=24\Rightarrow \overline{ab}=35\Rightarrow a=3,b=5$ și $N=6^3$. 1p

Dacă $k=3\Rightarrow \overline{ab}-11=81\Rightarrow \overline{ab}=92\Rightarrow a=9,b=2$ și $N=9^3$. 1p

Subiectul 2.

Fie mulțimea $A=\left\{7,77,777,\ldots,\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{2024\,cifre}\right\}$. Pentru fiecare mulțime $B\subset A$, notăm cu $S(B)$ și $P(B)$ suma, respectiv produsul elementelor mulțimii B. Studiați dacă există $X,Y\subset A, X\cup Y=A, X\cap Y=\varnothing$ în fiecare din cazurile:

a) $S(X)=S(Y)$;

b) $P(X)=P(Y)$.

Soluție: Vom arăta că răspunsul este negativ în ambele cazuri:

a) $7+77+\ldots+\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{2023\,cifre}<10+100+\ldots+\overline{1\underbrace{00\ldots0}_{2023\,cifre}}=\overline{\underbrace{11\ldots1}_{2023\,cifre}0}<\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{2024\,cifre}$. Deci, oricum am grupa numerele, suma elementelor care-l conține pe $\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{2024\,cifre}$ este mai mare decât suma elementelor celeilalte mulțimi. 3p

b) Presupunem că $P(X)=P(Y)$. Atunci $P(A)=(P(X))^2$, deci $P(A)$ este pătrat perfect. 1p

Dar $P(A)=7\cdot77\cdot\ldots\cdot\underbrace{\overline{77\ldots7}}_{2024\,cifre}=7^{2024}\cdot1\cdot11\cdot\ldots\cdot\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{2024\,cifre}=M_4+3$, care nu poate fi pătrat perfect. 3p

Subiectul 3.

Aflați numerele naturale nenule x și y, prime între ele, pentru care produsul xy divide suma $2x^2+11y^2$.

Soluție: Din $x|xy$ și $xy|2x^2+11y^2$ obținem $x|2x^2+11y^2$ și cum $x|2x^2$, avem $x|11y^2$.

Cum x și y sunt prime între ele $\Rightarrow x|11 \Rightarrow x\in\{1,11\}$. 3p

Caz I. $x=1$. Relația din ipoteză devine $y|2+11y^2 \Rightarrow y|2 \Rightarrow y\in\{1,2\} \Rightarrow (x,y)\in\{(1,1);(1,2)\}$. 2p

Caz II. $x=11$. Relația din ipoteză devine

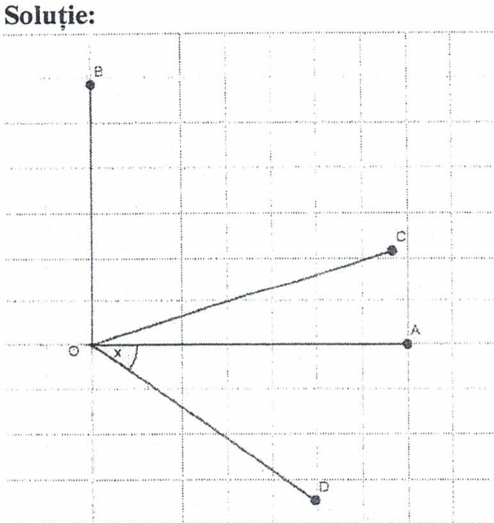
$11y|2\cdot 11^2+11y^2 \Rightarrow y|22+11y \Rightarrow y|22 \Rightarrow y\in\{1,2,11,22\},(x,y)=1 \Rightarrow (x,y)\in\{(11,1);(11,2)\}$.

În concluzie $(x,y)\in\{(1,1);(1,2);(11,1);(11,2)\}$. 2p

Subiectul 4.

Unghiurile $\widehat{AOC}$ și $\widehat{BOC}$ sunt adiacente complementare, iar D este în semiplanul determinat de OC și A astfel încât $\widehat{BOC}=2\cdot\widehat{AOD}$ și $4\cdot\widehat{DOC}=3\cdot\widehat{BOC}$. Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOC}$.

Soluție:

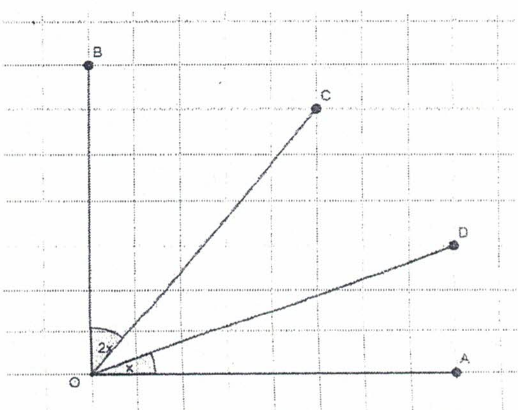


Cazul I. $[OA\subset Int(\widehat{COD})$. Notăm $\widehat{AOD}=x$. Atunci

$\widehat{BOC}=2x, \widehat{DOC}=\frac{3x}{2}$ și $\widehat{AOC}=\frac{x}{2}$. Cum

$90^\circ=\widehat{BOC}+\widehat{COA}=2x+\frac{x}{2} \Rightarrow x=36^\circ$. Atunci

$\widehat{BOC}=2\cdot 36^\circ=72^\circ, \widehat{AOD}=36^\circ, \widehat{DOC}=\frac{3\cdot 36^\circ}{2}=54^\circ$. 3,5p



Cazul II. $[OD\subset Int(\widehat{COA})$. Notăm $\widehat{AOD}=x$. Atunci

$\widehat{BOC}=2x, \widehat{DOC}=90^\circ-3x$. Din ipoteză rezultă

$4\cdot(90^\circ-3x)=2x \Rightarrow 360^\circ-12x=6x \Rightarrow x=20^\circ$. Atunci

$\widehat{BOC}=40^\circ, \widehat{AOD}=20^\circ, \widehat{DOC}=30^\circ$. 3,5p

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediţia a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A VII-A

Subiectul 1.

a) Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive a și b, are loc egalitatea $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n}+\sqrt{n+32}$ este rațional.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{48}$.

Soluție: a) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{a}^2-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}^2=a-b$ **1p**

b) Folosind eventual punctul **a)**, se deduce că pentru orice numere reale pozitive a și b, avem $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. $(*)$ **1p**

$\sqrt{n}+\sqrt{n+32}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\sqrt{n},\sqrt{n+32}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow$, $n=k^2$ și $n+32=p^2$, cu $k,\ p\in\mathbb{N}$ **1p**

$p^2-k^2=32$, deci p și k au aceeași paritate. Singurele perechi de numere naturale (p,k) care verifică egalitatea precedentă sunt $(6,2)$ și $(9,7)$, pentru care obținem soluțiile $n_1=4$ și $n_2=49$. **1p**

c) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3x}+\sqrt{3y}=12$. (1) **1p**

Deoarece $3x,3y\in\mathbb{N}$, egalitatea precedentă are loc dacă și numai dacă $3x$ și $3y$ sunt pătrate perfecte, deci dacă și numai dacă $x=3a^2$ și $y=3b^2$, cu $a,b\in\mathbb{N}$. **1p**

Din (1) obținem $a+b=4$, deci $(a,b)\in\{(0,4);(1,3);(2,2);(3,1);(4,0)\}$.

Rezultă soluțiile $(x,y)\in\{(0,48);(3,27);(12,12);(27,3);(48,0)\}$. **1p**

Observație: Se acordă **1p** și în cazul în care afirmația $(*)$ este enunțată, fără demonstrație.

Subiectul 2. Aflați numărul prim p pentru care suma cifrelor numărului $A=(p^2-7)^2+33(p^2-7)+630$ este minimă.

Mihaela Berindeanu, Gazeta Matematică 6-7-8/2024

Soluție: Pentru $p=2$, obținem $A=540$, deci $S(A)=9$ **1p**

Pentru $p=3$, obținem $A=700$, deci $S(A)=7$ **1p**

Dacă $p\geq 5$, atunci restul împărțirii sale la 6 este 1 sau 5, deci există $k\in\mathbb{N}$, astfel încât $p=6k+1$, sau $p=6k-1$ (în acest caz, $k\neq 0$). **1p**

Obținem $p^2-7=(6k\pm1)^2-7=M_6+1-7=6m$, cu $m\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Așadar $A=(6m)^2+33\cdot(6m)+630=36m^2+198m+630=9B$, cu $B\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Prin urmare, $S(A)$ este divizibil cu 9, și cum $S(A)\neq 0$, rezultă că $S(A)\geq 9$. **1p**

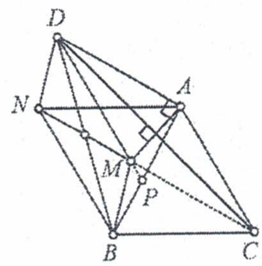
Soluția este $p=3$. **1p**

Subiectul 3. Fie triunghiul echilateral ABC, triunghiul dreptunghic isoscel ABD, cu $\widehat{BAD}=90^\circ$, astfel încât punctele C și D sunt situate de o parte și de alta a dreptei AB. Dacă punctul M este simetricul punctului A față de CD, iar punctul N este simetricul punctului M față de mijlocul segmentului BD, demonstrați că:

a) triunghiul ABN este echilateral;

b) punctele C, M și N sunt coliniare.

Cristian Heuberger



Soluție: a) CD este mediatoarea segmentului AM, deci $CA=CM$ și $DA=DM$.
Cum $CA=DA$, obținem că $ACMD$ este romb cu toate laturile congruente cu AB. ... **1p**

Evident $\widehat{DAC}=\widehat{DMC}=150^\circ$ și $\widehat{ACM}=\widehat{ADM}=30^\circ$. **1p**

$BMDN$ este paralelogram (diagonalele se intersectează la mijlocul fiecăreia), deci deducem că $NB=DM=AB$. **1p**

Fie $\{P\}=AB\cap DM$. Din triunghiul dreptunghic ADP rezultă că $\widehat{APD}=60^\circ$ și apoi $\widehat{ABN}=\widehat{APD}=60^\circ$ (coresp.). Triunghiul ABN este echilateral deoarece este isoscel cu un unghi de 60°. **1p**

b) $BN=AN=AB=AC=BC$, deci $ACBN$ este un romb. **1p**

CN este diagonală a rombului $ACBN$, deci este bisectoare în triunghiul echilateral ABC, prin urmare $\widehat{ACN}=30^\circ$. **1p**

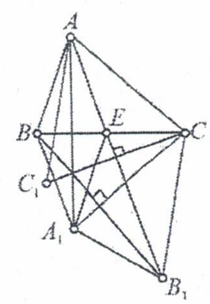
Cum și $\widehat{ACM}=30^\circ$ deducem că C, M, N sunt coliniare. **1p**

Subiectul 4. Fie un triunghi ascuțitunghic ABC, cu $\widehat{B}>\widehat{C}$, și punctele A_1, B_1, C_1, E, astfel încât A_1 este simetricul lui A față de dreapta BC, B_1 este simetricul lui B față de dreapta CA_1, C_1 este simetricul lui C față de dreapta AB_1 și $\{E\}=AB_1\cap BC$. Dacă $CC_1\perp A_1B$ și $\widehat{AC_1C}=60^\circ$, atunci:

a) demonstrați că ABA_1E este romb.

b) determinați măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Dana Heuberger



Soluție: a) $CC_1\perp AB_1$ și $CC_1\perp BA_1$, deci $AB_1 \parallel BA_1$. **1p**

A_1 este simetricul lui A față de BC, deci triunghiurile ABA_1 și AEA_1 sunt isoscele cu baza AA_1. Cum $\widehat{BA_1A}=\widehat{EAA_1}$ (a.i.), rezultă că $\Delta\, AA_1B\equiv\Delta\, A_1AE$ (U.L.U.). Deducem că $AB=BA_1=A_1E=EA$, adică ABA_1E este romb. **1p**

b) Datorită simetriilor, au loc congruențele: $\Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1BC$ și $\Delta\, A_1BC\equiv\Delta\, A_1B_1C$.
Rezultă că $\widehat{ACB}=\widehat{BCA_1}=\widehat{A_1CB_1}$ și $AB=BA_1=A_1B_1$. **1p**

$AB=A_1E$, deci $\Delta\, A_1B_1E$ este isoscel cu baza B_1E, iar $\widehat{A_1B_1A}=\widehat{A_1EB_1}=\widehat{BAB_1}$. (ultimele două unghiuri sunt corespondente prin raport cu dreptele paralele AB și A_1E și secanta AE) **1p**

Prin urmare, $\widehat{ABA_1}=\widehat{B_1A_1B}$ (suplemente ale unghiurilor congruente BAB_1 și A_1B_1A). **1p**

Din $\Delta\, ABC\equiv\Delta\, A_1BC\equiv\Delta\, A_1B_1C$ deducem că $\widehat{ABA_1}=2\cdot\widehat{ABC}$ și $\widehat{B_1A_1B}=2\cdot\widehat{BA_1C}=2\cdot\widehat{BAC}$, în consecință $\widehat{ABC}=\widehat{BAC}$, deci $\Delta\, ABC$ este isoscel cu baza AB, iar $\Delta\, ACB_1$ este isoscel cu baza AB_1. .... **1p**

$AC=AC_1$ și $\widehat{AC_1C}=60^\circ$, deci $\Delta\, ACC_1$ este echilateral, cu înălțimea AB_1. Rezultă că $\widehat{B_1AC}=30^\circ$.

Obținem $\widehat{ACB_1}=120^\circ$, așadar $\widehat{ACB}=40^\circ$. Prin urmare, $\widehat{BAC}=\widehat{ABC}=70^\circ$. **1p**

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MARAMUREȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Colegiul Național „Vasile Lucaciu"

Concursul regional "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie numerele naturale p și n, cu $2 \leq p < n$, care fac parte din secvența

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, p, n, p+n, 2n+p,$$

în care fiecare număr, începând de la al treilea până la ultimul, este suma celor două numere anterioare lui.
Fie

$$A = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 8} + \frac{8}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{n}{p\cdot(n+p)} + \frac{n+p}{n\cdot(2n+p)}$$

și

$$B = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{p\cdot(n+p)} + \frac{1}{n\cdot(2n+p)}.$$

a) Arătați că $A > 1$.

b) Demonstrați că $A \cdot B < 1$.

Soluție:

a) $A \geq \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 8} = \frac{47}{40} > 1$ .... 1 p

b) $A = \frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-2}{2\cdot 5} + \frac{8-3}{3\cdot 8} + \frac{13-5}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{(n+p)-p}{p\cdot(n+p)} + \frac{(2n+p)-n}{n\cdot(2n+p)}$

$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{p} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+p} \Leftrightarrow A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+p} - \frac{1}{2n+p}$ .... 2 p

$B = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 5\cdot 8} + \frac{8}{5\cdot 8\cdot 13} + \cdots + \frac{n}{p\cdot n\cdot(n+p)} + \frac{n+p}{n\cdot(n+p)\cdot(2n+p)}$

$B = \frac{3-1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5-2}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{8-3}{3\cdot 5\cdot 8} + \frac{13-5}{5\cdot 8\cdot 13} + \cdots + \frac{(n+p)-p}{p\cdot n\cdot(n+p)} + \frac{(2n+p)-n}{n\cdot(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$B = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n\cdot p} - \frac{1}{n\cdot(n+p)} + \frac{1}{n\cdot(n+p)} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$B = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$A + B = 2 - \frac{1}{n+p} - \frac{1}{2n+p} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)} < 2$ .... 0,5 p

$\sqrt{A\cdot B} \leq \frac{A+B}{2} < \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow A\cdot B < 1$ .... 0,5 p

Subiectul 2. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația

$$3x^2 - 6x + 4 = 6\{x\}([x] - \{x\}),$$

unde prin $[a]$ și $\{a\}$ s-a notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

(Gazeta Matematică nr. 5/2024)

Soluție: Se știe că $x = [x] + \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}$. .... 1 p

Pentru simplificarea scrierii, notăm $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = b \in [0,1)$.

Deci $x = a + b$. Înlocuim în ecuație și obținem

$3(a+b)^2 - 6(a+b) + 4 = 6b(a-b) \Leftrightarrow 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6a - 6b + 4 - 6ab + 6b^2 = 0$ .... 2 p

$\Leftrightarrow 3a^2 + 9b^2 - 6a - 6b + 4 = 0$ .... 1 p

$\Leftrightarrow 3(a-1)^2 + (3b-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{Z},\ b = \frac{1}{3} \in [0,1)$ .... 2 p

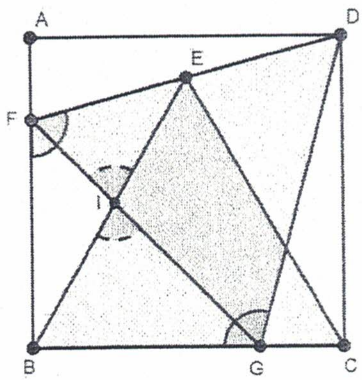
Deci $x = 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ .... 1 p

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un pătrat și E un punct în interiorul său, astfel încât triunghiul BEC este echilateral. Fie $\{F\} = AB \cap DE$ și $G \in (BC)$ astfel încât ΔDFG echilateral. Calculați raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ΔFIE și ΔBIG, unde $FG \cap BE = \{I\}$.

Bogdan Ionuți

Soluție:

Se obține $m(\sphericalangle ADF) = 15^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AFD) = 75^\circ$..1 p



Cum ΔDFG echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle DFG) = 60^\circ$, dar $m(\sphericalangle AFB) = 180^\circ$ (A, F, B coliniare), deci:

$m(\sphericalangle BFG) = 45^\circ$ cu $m(\sphericalangle FBG) = 90^\circ$

rezultă că triunghiul ΔBFG dreptunghic isoscel..2 p

Notăm cateta ΔBFG cu $x = BG$, rezultă $FG = x\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{r} m(\sphericalangle BIG) = m(\sphericalangle FIE)\ (\textit{opuse la vârf}) \\ m(\sphericalangle EFI) = m(\sphericalangle IBG) = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FIE \sim \Delta BIG$$ ....1 p

$E \in$ mediatoarei segmentului $AD \Rightarrow E$ mijlocul $DF \Rightarrow GE$ mediana în ΔGDF, rezultă:

$$FE = \frac{FG}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$ ....1 p

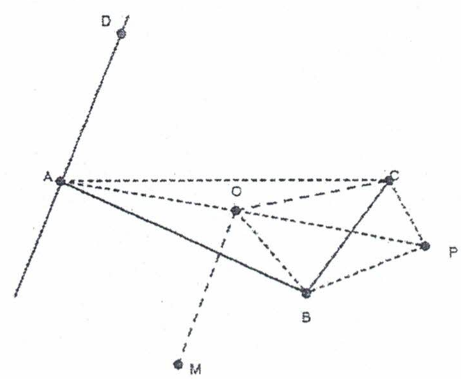
Notăm r raza cercului înscris în ΔFIE și R raza cercului înscris în ΔBIG.

Din asemănarea triunghiurilor rezultă că:

$$\frac{r}{R} = \frac{FE}{BG} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ....2 p

Subiectul 4. Fie punctele necoplanare A, B, C, D și M astfel încât ΔABC este un triunghi echilateral, $AD \parallel MO, AO = OM$ și $BM = OC$, unde punctul O este situat în interiorul ΔABC. Știind că $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle AOC) = 120^\circ$, determinați măsura unghiului dintre dreptele AD și BO.

Soluție:



Din $AD \parallel MO$, rezultă $\sphericalangle(AD, BO) = \sphericalangle(MO, BO) = \sphericalangle MOB$ ....1 p

Construim ΔPCB congruent cu ΔOAB, punctul P în exteriorul ΔABC, $P \in (ABC)$ ....1 p

Deoarece $m(\sphericalangle OBP) = 60^\circ$ și ΔOBP isoscel $\Rightarrow \Delta OBP$ echilateral $\Rightarrow$ $OP = OB$ ....1 p

$m(\sphericalangle AOB) = 360^\circ - (90^\circ + 120^\circ) = 150^\circ, m(\sphericalangle BPC) = 150$ ...1 p

Deci: $m(\sphericalangle CPO) = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ ....1 p

$AO = OM = PC, OB = OP, MB = OC$, deci $\Delta MOB \equiv \Delta CPO$.......1 p

Rezultă $m(\sphericalangle CPO) = m(\sphericalangle MOB) = 90^\circ$. ....1 p

Colegiul Național „Vasile Lucaciu"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN MARAMUREȘ

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"

ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE, CLASA a IX-a

Subiectul 1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\{x\}([x]+\{x+1\})=[x+1]$, unde $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă, a numărului real a.

Gazeta Matematică nr. 5/2024

Soluție:

Pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}$ au loc egalitățile $[x+1]=[x]+1$ și $\{x+1\}=\{x\}$ 2p

Ecuația devine $\{x\}[x]+\{x\}^2=[x]+1$ 2p

deci $(\{x\}-1)(x+1)=0$ 2p

cum $\{x\}\neq 1$, rezultă $x=-1$ 1p

Subiectul 2. Determinați numerele reale a,b, $0<b\leq a$, astfel încât ecuația $x^2+ax-2b=0$ să admită ambele rădăcini numere întregi.

Soluție:

Fie $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ rădăcinile ecuației. Din relațiile lui Viette avem $x_1+x_2=-a\in\mathbb{Z}$ și $x_1x_2=-2b\in\mathbb{Z}$ 1p

$\Delta=a^2+8b$ trebuie să fie pătrat perfect, $b>0\Rightarrow\Delta=a^2+8b>a^2$ și $\Delta=a^2+8b\leq a^2+8a<(a+4)^2$

.... 2p

$a^2<\Delta<(a+4)^2$, Δ pătrat perfect $\Rightarrow\Delta\in\left\{(a+1)^2,(a+2)^2,(a+3)^2\right\}$. 1p

Dacă $\Delta=(a+1)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+2a+1\Rightarrow 2b=\dfrac{2a+1}{4}\notin\mathbb{Z}$.

Dacă $\Delta=(a+3)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+6a+9\Rightarrow 2b=\dfrac{6a+9}{4}\notin\mathbb{Z}$. 1p

Dacă $\Delta=(a+2)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+4a+4\Rightarrow 2b=a+1$, soluțiile ecuației sunt $x_1=1,x_2=-a-1\in\mathbb{Z}$,

deci $a=k,b=\dfrac{k+1}{2},k\in\mathbb{Z}$. 2p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Subiectul 3.

a) Arătați că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, pentru orice numere reale a,b,c.

b) Fie numerele reale strict pozitive $x,y,z>0$, cu $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Determinați valoarea minimă a expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}.$$

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$. 2p

b) $\frac{x^2}{x+y}=\frac{x^2+xy-xy}{x+y}=x-\frac{xy}{x+y} \geq x-\frac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\frac{\sqrt{xy}}{2}$ și anoloagele. 2p

$$E(x,y,z) \geq x+y+z-\frac{1}{2}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=x+y+z-\frac{1}{2}.$$ 1p

Din a) $\Rightarrow x+y+z \geq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1 \Rightarrow E(x,y,z) \geq \frac{1}{2}$ 1p

cu egalitate pentru $x=y=z=\frac{1}{3}$. 1p

Subiectul 4.

a) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale x astfel încât $\sqrt{x+2024}$ și $\sqrt{x+2025}$ să fie numere raționale.

b) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale x astfel încât $\sqrt{x+2024}$ și $\sqrt{x+2025}$ să fie numere iraționale.

Soluție: a) $\sqrt{x+2024}=a \in \mathbb{Q}_+, \sqrt{x+2025}=b \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow a^2=x+2024, b^2=x+2025, b^2-a^2=1$. 2p

$b-a<b+a$, alegem $b-a=\frac{m}{n}, b+a=\frac{n}{m}, m,n \in \mathbb{N}^*, m<n$. 1p

$b=\frac{m^2+n^2}{2mn}, a=\frac{n^2-m^2}{2mn}, x=a^2-2024=\left(\frac{n^2-m^2}{2mn}\right)^2-2024$. 2p

b) Pentru $x=10^n+3, n \in \mathbb{N}^*$, avem $U(x+2024)=7, U(x+2025)=8 \Rightarrow x+2024, x+2025$ nu sunt pătrate perfecte $\Rightarrow \sqrt{x+2024}, \sqrt{x+2025}$ sunt iraționale 2p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"

ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE, CLASA A X-A

Subiectul 1.
Numerele reale x și y verifică relația $x-\sqrt{x+2}=\sqrt{y+3}-y$. Determinați $\min(x+y)$ și $\max(x+y)$.
Soluție:
Fie $S=x+y$. Avem $x+y=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}$, de unde $S^2=S+5+2\sqrt{(x+2)(y+3)}$
$\Rightarrow S^2-S-5\geq 0$, cu $S\geq 0$, de unde

$$S\geq\frac{1+\sqrt{21}}{2}. \qquad (3p)$$

Obținem

$$\min(x+y)=\frac{1+\sqrt{21}}{2},$$

care se atinge pentru

$$x=-2, y=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

sau pentru

$$x=\frac{7+\sqrt{21}}{2}, y=-3 \quad \left(adică\ \sqrt{(x+2)(y+3)}=0\right) \qquad (0.5p)$$

Pe de altă parte, $2\sqrt{(x+2)(y+3)}\leq(x+2)+(y+3)=S+5$, deci $S^2-2S-10\leq 0$
Obținem

$$\max(x+y)=1+\sqrt{11}, \qquad (3p)$$

care se atinge dacă $x+2=y+3$ și $x+y=1+\sqrt{11}$, adică pentru

$$x=1+\frac{\sqrt{11}}{2} \text{ și } y=\frac{\sqrt{11}}{2}. \qquad (0.5p)$$

Subiectul 2. Determinați funcția bijectivă $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, cu proprietatea că

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

Mihai Zelina

Soluție:
Din relație rezultă:

$$\left.\begin{array}{r}|f(x+1)-f(x)|\leq 1\Rightarrow f(x+1)-f(x)\in\{-1,0,1\}\\ f\ bijectivă\ \Rightarrow f\ injectivă\end{array}\right\}\Rightarrow f(x+1)-f(x)\in\{-1,1\},\forall x\in\mathbb{N} \quad (*) \quad (2p)$$

f bijectivă $\Rightarrow f$ surjectivă și fie $k\in\mathbb{N}$ cu $f(k)=0$
Prin urmare, din relația (*), rezultă:

$$f(k+1)-f(k)\in\{-1,1\}\Rightarrow f(k+1)=\pm1\Rightarrow f(k+1)=1. \qquad (2p)$$

Dacă $k\geq 1\overset{(*)}{\Rightarrow} f(k)-f(k-1)=\pm1\Rightarrow f(k-1)=1$ și f nu mai este injectivă.
Deci, $k\geq 1$ este imposibil și atunci $k=0\Rightarrow f(0)=0$. (1p)
Din (*), avem că:

$$f(1)-f(0)=\pm1\Rightarrow f(1)=1$$

$$f(2)-f(1)=\pm 1 \Rightarrow f(2)\in\{0,2\} \overset{f\ inj}{\Longrightarrow} f(2)=2$$

Inductiv, reiese că $f(n)=n, \forall n\in\mathbb{N}$. (2p)

Subiectul 3. Fie numerele reale, $a,b,c\in(0,\infty)$ astfel încât $a+b+c=3$. Arătați că:

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a}\geq\frac{3}{2}.$$

(*Gazeta Matematică nr.5/2024*)

Soluție:

$$\frac{a^3}{a^2+b}=\frac{a(a^2+b)-ab}{a^2+b}=a-\frac{ab}{a^2+b}\Rightarrow$$

$$\frac{a^3}{a^2+b}+\frac{b^3}{b^2+c}+\frac{c^3}{c^2+a}=a+b+c-\frac{ab}{a^2+b}-\frac{bc}{b^2+c}-\frac{ca}{c^2+a}=$$

$$=3-\frac{ab}{a^2+b}-\frac{bc}{b^2+c}-\frac{ca}{c^2+a}$$ (3p)

Rămâne de arătat:

$$3-\frac{ab}{a^2+b}-\frac{bc}{b^2+c}-\frac{ca}{c^2+a}\geq\frac{3}{2}$$ (1p)

Avem

$$\frac{ab}{a^2+b}+\frac{bc}{b^2+c}+\frac{ca}{c^2+a}\leq\frac{ab}{2a\sqrt{b}}+\frac{bc}{2b\sqrt{c}}+\frac{ca}{2c\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}}{2}\leq\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\leq 9=3(a+b+c) \ \text{"A"}$$ (3p)

Subiectul 4. Demonstrați că $\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]$, pentru orice număr natural n.

Soluție:

Pentru $n=0$ părțile întregi sunt egale cu 1 (0,5p)

Presupunem $n\geq 1$. Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}>2\sqrt[6]{n(n+1)}=\sqrt[6]{64n^2+64n}>\sqrt[6]{64n^2+48n+9}=\sqrt[6]{(8n+3)^2},$$

Deci $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}>\sqrt[3]{8n+3}$ (1) (1,5p)

Cum funcția $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ este strict concavă, rezultă:

$$f\left(\frac{n+(n+1)}{2}\right)>\frac{f(n)+f(n+1)}{2},$$

De unde $\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}<\sqrt[3]{8n+4}$ (2) (2p)

Din (1) și (2) rezultă: $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]\leq\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]\leq\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ (1p)

Vom arata că $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ (*)

Presupunând contrariul, notând $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=k\Rightarrow\left[\sqrt[3]{8n+4}\right]\geq k+1$ $(din\ (*))$ (1p)

Atunci $8n+3<(k+1)^3$ și $(8n+4)\geq(k+1)^3$, deci $8n+4=(k+1)^3$, absurd, deoarece $8n+4$ nu este cub perfect, fiind multiplu de 2, dar nu și de 2^3.

În concluzie, $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right]=\left[\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\right]$, pentru $\forall n\in\mathbb{N}$. (1p)

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $A^k \neq \lambda \cdot I_2$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$, iar matricea A^k are elementul de pe poziția $(1,2)$ egal cu zero. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, matricea A^n are elementul de pe poziția $(1,2)$ egal cu zero.

Supliment Gazeta Matematică nr. 4/2024

Soluție: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Din ipoteză, avem $A^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, deci $b_k = 0$.

În plus, $c_k \neq 0$ sau $a_k \neq d_k$ **1p**

$A^k \cdot A^n = A^n \cdot A^k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_k a_n & a_k b_n \\ c_k a_n + d_k c_n & c_k b_n + d_k d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n a_k + b_n c_k & b_n d_k \\ c_n a_k + d_n c_k & d_k d_n \end{pmatrix}$ (1), de unde obținem $b_n c_k = 0$ (2)

și $a_k b_n = b_n d_k$ (3) **3p**

I Dacă $c_k \neq 0$, din (2) obținem $b_n = 0$. **1p**

II Dacă $c_k = 0$, deoarece $a_k \neq d_k$, din (3) obținem $b_n = 0$. **1p**

Din **I** și **II** rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. **1p**

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $k = \overline{2, n-1}$ are loc egalitatea: $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sigma(i) \cdot \sigma(\sigma(i))} = \frac{k-1}{2(k+1)}$.

Dana Heuberger

Soluție: Pentru $k = 2$, obținem $\sigma(1) \cdot \sigma(\sigma(1)) = 6$, deci $\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 3 \end{cases}$, sau $\begin{cases} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(3) = 2 \end{cases}$, sau $\begin{cases} \sigma(1) = 6 \\ \sigma(6) = 1 \end{cases}$. **1p**

Fie $k = \overline{2, n-2}$. Cum $k+1 \leq n-1$, avem $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma(i) \cdot \sigma(\sigma(i))} = \frac{k}{2(k+2)}$. Scăzând egalitatea din enunț din egalitatea precedentă, obținem $\frac{1}{\sigma(k) \cdot \sigma(\sigma(k))} = \frac{k}{2(k+2)} - \frac{k-1}{2(k+1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Așadar $\sigma(k) \cdot \sigma(\sigma(k)) = (k+1)(k+2)$, pentru orice $k = \overline{2, n-2}$. (1) **1p**

i) Dacă $\sigma(1) = 2$ și $\sigma(2) = 3$, folosind (1), deducem prin inducție că $\sigma(t) = t+1$, $\forall\, t = \overline{1, n-1}$.

Deoarece $1 \in \operatorname{Im}\sigma$, rezultă că $\sigma(n) = 1$, deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$. **1p**

ii) Dacă $\sigma(1)=3$ și $\sigma(3)=2$, pentru $k=3$ în (1), avem $2\cdot\sigma(2)=\sigma(3)\cdot\sigma(\sigma(3))=20$, deci $\sigma(2)=10$.

Pentru $k=2$ în (1), avem $10\cdot\sigma(10)=\sigma(2)\cdot\sigma(\sigma(2))=12$, deci $\sigma(10)=1{,}2\notin\mathbb{N}$, fals. **1p**

iii) Dacă $\sigma(1)=6$ și $\sigma(6)=1$, atunci $n\geq 6$, deci $n-2\geq 4$, așadar îi putem da lui k valorile 2, 3, 4 în (1).

Pentru $k=2$ în (1), avem $\sigma(2)\cdot\sigma(\sigma(2))=12$, (2) deci $12\mid\sigma(2)$, așadar $\sigma(2)\in\{2,3,4,12\}$.

Dacă $\sigma(2)=2$, din (2) obținem $2\cdot\sigma(2)=12$, deci $\sigma(2)=6$, fals.

Dacă $\sigma(2)=12$, din (2) obținem $12\cdot\sigma(12)=12$, deci $\sigma(12)=1$, fals. **1p**

Dacă $\sigma(2)=3$, din (2) obținem $3\cdot\sigma(3)=12$, deci $\sigma(3)=4$. Pentru $k=3$ în (1), avem $\sigma(3)\cdot\sigma(\sigma(3))=20$ deci $4\cdot\sigma(4)=20$, adică $\sigma(4)=5$. Pentru $k=4$ în (1), avem $\sigma(4)\cdot\sigma(\sigma(4))=30$ deci $5\cdot\sigma(5)=30$, adică $\sigma(5)=6$, fals. **1p**

Dacă $\sigma(2)=4$, din (2) obținem $4\cdot\sigma(4)=12$, deci $\sigma(4)=3$. Pentru $k=4$ în (1), avem $\sigma(4)\cdot\sigma(\sigma(4))=30$ deci $3\cdot\sigma(3)=30$, adică $\sigma(3)=10$. Prin urmare, $n\geq 10$, deci $n-2\geq 8$, așadar putem înlocui $k=6$ în (1) și obținem $6=1\cdot\sigma(1)=\sigma(6)\cdot\sigma(\sigma(6))=56$, fals.

Din **i), ii)** și **iii)** deducem că singura soluție este $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix}$. **1p**

Subiectul 3. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n+2024)\leq 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Dați un exemplu de șir care verifică inegalitatea din enunț și nu este monoton.

b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Soluție: a) $x_{2k}=1$ și $x_{2k-1}=-2025$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. **2p**

b) Inegalitatea din enunț se rescrie: $x_{n+1}^2+2024x_{n+1}\leq x_n^2+2024x_n$ (1) **1p**

Metoda I: $(1)\Leftrightarrow x_{n+1}^2+2\cdot 1012x_{n+1}+1012^2\leq x_n^2+2\cdot 1012x_n+1012^2\Leftrightarrow(x_{n+1}+1012)^2\leq(x_n+1012)^2$ **1p**

Deoarece $|x_{n+1}+1012|\leq|x_n+1012|$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(|x_n+1012|)_{n\geq 1}$ este descrescător. **1p**

Așadar, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $|x_n+1012|\leq|x_1+1012|$, deci $x_n\in[-1012-|x_1+1012|,-1012+|x_1+1012|]$, adică șirul este mărginit. **2p**

Metoda a II-a: Fie $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n=x_n^2+2024x_n$. Din (1) obținem că $y_{n+1}\leq y_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, și $y_n\leq y_1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$y_n=x_n^2+2024x_n\geq -1012^2$, deci $y_n\in[-1012^2,y_1]$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, așadar șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. **1p**

Ecuația $x_n^2+2024x_n-y_n=0$ are $\Delta=2024^2+4y_n\geq 0$, deci $x_n=\dfrac{-2024\pm\sqrt{2024^2+4y_n}}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

$|x_n|\leq 1012+\sqrt{1012^2+y_n}\leq 1012+\sqrt{1012^2+y_1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. **2p**

Observație: Orice alt exemplu corect dat la punctul **a)** se notează cu 2 puncte.

Subiectul 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict descrescător, cu $a_1=1$, astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}.$$

a) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n>\frac{1}{2^n}$.

b) Demonstrați că șirul $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

c) Determinați termenul general al șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $\frac{1}{a_n}\in\mathbb{N}^*$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Cristian Heuberger

a) Pentru $n=1$, relația de recurență devine $a_1-a_2=a_2$ și de aici $a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1$. $(*)$

Dacă $n\geq 2$, avem: $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-3}-a_{2n-2}+a_{2n-1}-a_{2n}=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n-2}+a_{2n-1}+a_{2n}$, (1)

respectiv $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-3}-a_{2n-2}=a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n-2}$. (2)

Scăzând din (1) egalitatea (2), obținem $\cancel{a}_{2n-1}-a_{2n}=-a_n+\cancel{a}_{2n-1}+a_{2n}$. Așadar $a_{2n}=\frac{1}{2}\cdot a_n$, $\forall n\geq 2$.

Folosind $(*)$, deducem că $a_{2n}=\frac{1}{2}\cdot a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, obținem inductiv: $a_{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot a_1=\frac{1}{2^n}$. (3) **1p**

Dar $n<2^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Cum șirul este strict descrescător, rezultă că $a_n>a_{2^n}=\frac{1}{2^n}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

b) Fie $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$x_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\ldots+\left(a_{2^{n-1}+1}+a_{2^{n-1}+2}+\ldots+a_{2^n}\right)\geq$$

$$\geq a_1+a_2+2\cdot a_4+4\cdot a_8+\ldots+2^{n-1}\cdot a_{2^n}=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}.\ (4)$$ **1p**

Din (4) deducem că șirul $\left(x_{2^n}\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit superior, deci $(x_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit **1p**

c) Demonstrăm că $a_n=\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Avem $a_1=1=\frac{1}{1}$ și $a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1=\frac{1}{2}$.

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ și $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $2^k\leq n<2^{k+1}$. Așadar $n=2^k+r$, cu $r\in\{0,1,\ldots,2^k-1\}$.

Deoarece șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, cu $2^k\leq m<2^{k+1}$, avem $a_{2^k}\geq a_m>a_{2^{k+1}}$.

Utilizând (3), obținem $\frac{1}{2^k}\geq a_m>\frac{1}{2^{k+1}}$, deci $2^k\leq\frac{1}{a_m}<2^{k+1}$.

Folosind din nou monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, rezultă că $2^k\leq\frac{1}{a_{2^k}}<\frac{1}{a_{2^k+1}}<\ldots<\frac{1}{a_{2^{k+1}-1}}<2^{k+1}$. **1p**

Cum intervalul $\left[2^k,2^{k+1}\right)$ conține exact 2^k numere naturale, iar numerele $\frac{1}{a_{2^k}},\frac{1}{a_{2^k+1}},\ldots,\frac{1}{a_{2^{k+1}-1}}$ sunt naturale, deducem că $\frac{1}{a_m}=m$, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, cu $2^k\leq m<2^{k+1}$. Așadar $a_n=\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie „$*$" o lege de compoziție asociativă și comutativă definită pe o mulțime nevidă S, care are proprietatea că , pentru orice $x,y \in S$, există $z \in S$ astfel încât $x*z=y$.

Arătați că dacă $a,b,c \in S$ și $a*c=b*c$, atunci $a=b$.

Soluție: Fie $a \in S \Rightarrow \exists e_a \in S$, astfel încât $a*e_a=a$. 1p

Pentru orice $x \in S$ avem $(a*e_a)*x=a*x$, deci din proprietatea de asociativitate și ce de comutativitate rezultă $(a*x)*e_a=a*x$, oricare ar fi $x \in S$. 1p

Pentru orice $y \in S$, $\exists z \in S$ astfel încât $a*z=y$, deci $y*e_a=y, \forall y \in S$. 2p

Fie $c \in S$, oarecare. Atunci $\exists z_c \in S$ pentru care $c*z_c=e_a$. 1p

Egalitatea $a*c=b*c$ implică $a*c*z_c=b*c*z_c$, deci $a*e_a=b*e_a$ ceea ce implică $a=b$. 2p

Subiectul 2. Fie $H \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu cel puțin două elemente, pe care definim legea de compoziție internă „$\circ$" cu proprietatea că $x<x\circ y<y$ pentru orice $x,y \in H$ astfel încât $x<y$.

a) Arătați că „$\circ$" nu admite element neutru și că nu este asociativă.

b) Dați exemplu de o mulțime H și o operație „$\circ$", care să fie comutativă.

c) Dați exemplu de o mulțime H și o operație „$\circ$", care să fie necomutativă.

(*Gazeta Matematică nr. 9/2024*)

Soluție

a) Presupunem că „$\circ$" admite elementul neutru $e \in H$, deci

există cel puțin un element $x \in H, x \neq e$ pentru care $x\circ e=e\circ x=x$. 1p

Dacă $x<e \Rightarrow x<x\circ e<e \Rightarrow x<x<e$, fals.

Dacă $e<x \Rightarrow e<e\circ x<x \Rightarrow e<x<x$, fals.

Deci legea „$\circ$" nu admite element neutru. 1p

Notăm $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\ ori}=x^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $x<x\circ x \Leftrightarrow x<x^{(2)}$, atunci $x<x^{(3)}<x^{(2)} \Rightarrow x<x^{(4)}<x^{(3)}<x^{(5)}<x^{(2)}$

$\Rightarrow x<x^{(5)}<x^{(4)}<x^{(7)}<x^{(3)}<x^{(8)}<x^{(5)}<x^{(7)}<x^{(2)}$, fals. 1p

Dacă $x\circ x<x \Leftrightarrow x^{(2)}<x$, atunci $x^{(2)}<x^{(3)}<x \Rightarrow x^{(2)}<x^{(5)}<x^{(3)}<x^{(4)}<x$

$\Rightarrow x^{(2)}<x^{(7)}<x^{(5)}<x^{(8)}<x^{(3)}<x^{(7)}<x^{(4)}<x^{(5)}<x$, fals. 1p

Deci $x\circ x=x, \forall x \in H$.

Presupunem că „$\circ$" este asociativă.

Fie $x<y \Rightarrow x<x\circ y<y \Rightarrow x<x\circ(x\circ y)<x\circ y<y \Rightarrow x<(x\circ x)\circ y<x\circ y<y \Rightarrow x<x\circ y<x\circ y<y$, fals. Deci legea „$\circ$" nu este asociativă. 1p

b) $x\circ y=\dfrac{x+y}{2}, H=\mathbb{R}$ 1p

c) $x\circ y=\dfrac{x+2y}{3}, H=\mathbb{R}$ 1p

Subiectul 3. Fie $f, F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, unde F este o primitivă pe $(-1,1)$ a funcției f. Determinați funcția F pentru care egalitatea

$$F(x) + (x^2+1) f(x) = (x^2+1) e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}$$

are loc, oricare ar fi $x \in (-1,1)$.

Soluție: $F(x) + (x^2+1) f(x) = (x^2+1) e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x} \Rightarrow e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{x^2+1} F(x) + e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F'(x) = e^{\arcsin x}$

$\Rightarrow \left(e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x)\right)' = e^{\arcsin x} \Rightarrow e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x) \in \int e^{\arcsin x} dx$ 3p

$\int e^{\arcsin x} dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx = x \cdot \arcsin x + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x} dx =$

$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} dx \Rightarrow \int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$ 3p

Avem $e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x) = \frac{1}{2} e^{\arcsin x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$

deci $F(x) = \frac{1}{2} e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + c \cdot e^{-\operatorname{arctg} x}, c \in \mathbb{R}$ 1p

Subiectul 4.

a) Arătați că $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ oricare ar fi $x > 0$.

b) Fie $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$. Arătați că F este o funcție bijectivă.

(Gazeta Matematică nr. 5/2024)

Soluție:

a) Fie $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

Avem $h''(x) = e^x - 1 > 0$ pentru orice $x > 0$, deci h' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$

Rezultă $h'(0) = 0 \le h'(x) = e^x - 1 - x$ oricare ar fi $x \ge 0$, deci h este crescătoare pe $(0,\infty)$

Rezultă $h(0) = 0 \le h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ oricare ar fi $x \ge 0$, deci

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ oricare ar fi } x \ge 0 \text{ .... 2p}$$

b) Arătăm că funcția F este injectivă și surjectivă.

Din $F'(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} > 0$ pentru orice $x \in (0,\infty)$, rezultă F este strict crescătoare, deci este injectivă 1p

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\ln x$

$g'(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x-1-\frac{1}{2x}=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)$

$e^x>1+x+\frac{x^2}{2}, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}, \forall x\in(0,\infty)$

$\Rightarrow g'(x)>0, \forall x>0 \Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. 1p

Pentru $x>1\Rightarrow g(x)>g(1)\Rightarrow F(x)>\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)\right)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$ 1p

Pentru $x<1\Rightarrow g(x)<g(1)\Rightarrow F(x)<\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)\right)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=-\infty$ 1p

F este continuă, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty, \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=-\infty\Rightarrow \mathrm{Im}(F)=\mathbb{R}\Rightarrow F$ este surjectivă 1p