

**Baraj de selecție pentru
Concursului Interjudețean de Matematică și Informatică**

GRIGORE C. MOISIL

17 martie 2023

Clasa a V - a

Problema 1. *Determinați ultimele trei cifre ale numărului*

$$N = 5^{2023} + 5^{2022} + 5^{2021} + 5^{2020} + 5^{2019}.$$

Problema 2. *Trei prieteni, Aron, Bogdan și Codrin, urcă și merg împreună în același taxi. Aron coboară după 12 km de la urcare, Bogdan coboară după 46 km de la urcare, iar Codrin mai parcurge 42 km și plătește, la final, pentru toată cursa 176 lei. Câți lei trebuie să primească Codrin de la Aron, respectiv de la Bogdan, astfel încât prețul călătoriei să fie echitabil împărțit (în funcție de distanța parcursă) între cei trei prieteni.*

Problema 3. *Fie a, b, c, d, e și f șase numere naturale care sunt nedivizibile cu 7.*

Determinați cel mai mic număr prim p pentru care suma

$$a^6 + b^6 + c^6 + p + d^6 + e^6 + f^6$$

este divizibilă cu 7.

Notă :

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru – 1,5 ore

**Baraj de selecție pentru
Concursului Interjudețean de Matematică și Informatică**

GRIGORE C. MOISIL

17 martie 2023

Soluții și barem

Clasa a V - a

Problema 1. *Determinați ultimele trei cifre ale numărului*

$$N = 5^{2023} + 5^{2022} + 5^{2021} + 5^{2020} + 5^{2019}.$$

Barem

Cum $N = 5^{2019}(5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1) = 5^{2019} \cdot 781 \dots\dots\dots(3p)$

din faptul că ultimele trei cifre ale lui 5^{2n+1} sunt 125 pentru orice $n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(2p)$

se obține că ultimele trei cifre ale lui N sunt

ultimele trei cifre ale produsului $125 \cdot 781$, adică 625 $\dots\dots\dots(2p)$

Problema 2. *Trei prieteni, Aron, Bogdan și Codrin, urcă și merg împreună în același taxi. Aron coboară după 12 km de la urcare, Bogdan coboară după 46 km de la urcare, iar Codrin mai parcurge 42 km și plătește, la final, pentru toată cursa 176 lei. Câți lei trebuie să primească Codrin de la Aron, respectiv de la Bogdan, astfel încât prețul călătoriei să fie echitabil împărțit (în funcție de distanța parcursă) între cei trei prieteni.*

Barem

Pentru totalul de 88 km se plătește 176 lei, deci costul unui kilometru este de 2 lei. **(1p)**

Aron îi va da lui Codrin 8 lei (prețul pentru 4 km) $\dots\dots\dots(3p)$

Bogdan îi va da lui Codrin 42 lei (prețul pentru 21 km) $\dots\dots\dots(3p)$

Problema 3. *Fie a, b, c, d, e și f șase numere naturale care sunt nedivizibile cu 7. Determinați cel mai mic număr prim p pentru care suma*

$$a^6 + b^6 + c^6 + p + d^6 + e^6 + f^6$$

este divizibilă cu 7.

Barem

Un număr nedivizibil cu 7 poate avea una din formele

$7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5$ sau $7k + 6$, cu $k \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(1p)$

Pentru un număr de forma $7k + 1$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 1)^6 = 7K + 1$

Pentru un număr de forma $7k + 2$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 2)^6 = 7K + 1$

Pentru un număr de forma $7k + 3$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 3)^6 = 7K + 1$

Pentru un număr de forma $7k + 4$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 4)^6 = 7K + 1$

Pentru un număr de forma $7k + 5$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 5)^6 = 7K + 1$

Pentru un număr de forma $7k + 6$ există $K \in \mathbb{N}$ astfel încât $(7k + 6)^6 = 7K + 1$

Deci pentru suma $S = a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6$ există $M \in \mathbb{N}$ astfel încât

$S = 7M + 6 \dots\dots\dots(1p)$

(3p)

Dacă $7 \mid (S + p)$ atunci $7 \mid (p + 6) \dots\dots\dots(1p)$

Pentru $p = 29$ număr prim, rezultă $(a^6 + b^6 + c^6 + p + d^6 + e^6 + f^6) : 7 \dots\dots\dots(1p)$