

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a VI-a

1. **a.** Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că dacă numerele $n + 1$ și $2n + 3$ nu sunt divizibile cu 3, atunci numărul $4n + 5$ este divizibil cu 3.
b. Determinați câte numere naturale n există astfel încât să fie mai mici decât 2025, iar dacă numerele naturale $n + 1$ și $2n + 3$ nu sunt divizibile cu 3, atunci $4n + 5$ să fie un număr natural divizibil cu 3.
2. Fie unghiurile proprii $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât semidreapta $(OC$ este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOB$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ formează cu semidreapta $(OC$ un unghi cu măsura de 30° , iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ formează un unghi drept cu semidreapta $(OA$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AOC$.
3. Determinați mulțimile de numere naturale A și B având fiecare câte trei elemente, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile :
 - i) elementele mulțimii A sunt numere pare;
 - ii) suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B ;
 - iii) dacă $x + 4 \in A$, atunci $3x \in B$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a VI-a
BAREM

1. a. Arătați că, dacă $n \in \mathbb{N}$ și numerele $n + 1$ și $2n + 3$ nu sunt divizibile cu 3, atunci $4n + 5$ este divizibil cu 3.

b. Determinați câte numere naturale n există astfel încât să fie mai mici decât 2025, iar dacă numerele naturale $n + 1$ și $2n + 3$ nu sunt divizibile cu 3, atunci $4n + 5$ să fie un număr natural divizibil cu 3.

Soluție :

a. Dacă $n + 1$ nu este divizibil cu 3, atunci

există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n + 1 = 3k + 1$ sau $n + 1 = 3k + 2$ **2p**

I. $n + 1 = 3k + 1 \Rightarrow n = 3k$, deci $2n + 3 = 6k + 3 : 3$, contradicție cu ipoteza

II. $n + 1 = 3k + 2 \Rightarrow n = 3k + 1$, deci $2n + 3 = 6k + 5$ nu este divizibil cu 3 și

$4n + 5 = 12k + 9 : 3$ **2p**

b. Din soluția de la **a.** $\Rightarrow n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Cum $n < 2025$ **1p**

$\Rightarrow n \in \{3 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 1 + 1, \dots, 3 \cdot 674 + 1\}$, adică 675 de numere. **2p**

2. Fie unghiurile proprii $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât semidreapta (OC este inclusă în interiorul $\sphericalangle AOB$. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOB$ formează cu semidreapta (OC un unghi cu măsura de 30° , iar bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$ formează un unghi drept cu semidreapta (OA . Determinați măsura unghiului $\sphericalangle AOC$.

Soluție :

Dacă $[OE$ este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ avem $\sphericalangle COE = \sphericalangle BOE = x$ și $[OD$ bisectoarea $\sphericalangle AOB$ avem $\sphericalangle DOC = 30^\circ$. **1p**

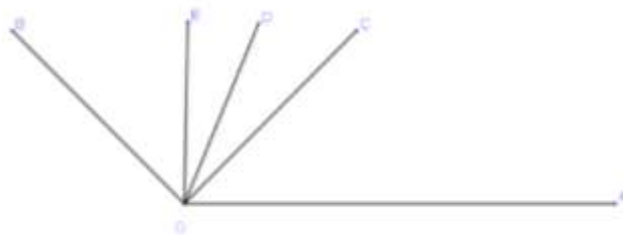
I. Dacă $(OD \subset \text{int } \sphericalangle BOC$ avem :

$$\sphericalangle DOB = 2x - 30^\circ = \sphericalangle AOD$$

$$\Rightarrow \sphericalangle EOA = 90^\circ = 3x - 60^\circ.$$

$$\Rightarrow x = 50^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD - \sphericalangle DOC = 40^\circ.$$

3p



II. Dacă $(OD \subset \text{int } \sphericalangle AOC$ avem :

$$\sphericalangle DOB = 2x + 30^\circ = \sphericalangle AOD$$

$$\Rightarrow \sphericalangle EOA = 90^\circ = 3x + 60^\circ.$$

$$\Rightarrow x = 10^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOC = \sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC = 80^\circ.$$

3p



Obs : Semidreptele (OD și (OE nu pot coincide, căci ar rezulta $\sphericalangle AOB = 180^\circ$.

3. Determinați mulțimile de numere naturale A și B având fiecare câte trei elemente, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile :

- i) elementele mulțimii A sunt numere pare;
- ii) suma elementelor mulțimii A este egală cu suma elementelor mulțimii B ;
- iii) dacă $x + 4 \in A$, atunci $3x \in B$.

Soluție :

Fie $A = \{2x, 2y, 2z, \}$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}$ distincte două câte două.

1p

Deoarece $2x = (2x - 4) + 4 \xRightarrow{\text{iii)}} 3(2x - 4) \in B \Rightarrow 6x - 12 \in B \Rightarrow$

2p

$B = \{6x - 12, 6y - 12, 6z - 12\} \Rightarrow x, y, z \geq 2$, deoarece $6x - 12 \in \mathbb{N}$ etc.

2p

$\xRightarrow{\text{ii)}} 2x + 2y + 2z = 6x - 12 + 6y - 12 + 6z - 12 \Rightarrow x + y + z = 9$

1p

$\Rightarrow \{x, y, z\} = \{2, 3, 4\} \Rightarrow A = \{4, 6, 8\}$ și $B = \{0, 6, 12\}$

1p