

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a VII-a

1. Se consideră numărul $A = \sqrt{\underbrace{444 \dots 4}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{888 \dots 8}_{n \text{ cifre}}}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$.

2. Fie M un punct în interiorul $\triangle ABC$. Punctele D, E, F sunt simetricele punctului M față de mijloacele laturilor AB, AC , respectiv BC . Arătați că:

a. $\triangle ABC \equiv \triangle FED$;

b. dreptele AF, BE și CD sunt concurente.

3. Determinați numerele reale x și y știind că

$$\begin{cases} x + x^3 = 2026y \\ y + y^3 = 2026x \end{cases}$$

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025

Clasa a VII-a

BAREM

1. Se consideră numărul $A = \sqrt{\underbrace{444 \dots 4}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{888 \dots 8}_{n \text{ cifre}}}$. Demonstrați că $A \in \mathbb{N}$

Soluție :

Dacă $x = \underbrace{111 \dots 1}_{n \text{ cifre}}$, atunci $10^n - 1 = 9x$

1p

$$\underbrace{444 \dots 4}_{2n \text{ cifre}} - \underbrace{888 \dots 8}_{n \text{ cifre}} = 4(x \cdot 10^n + x) - 8x$$

3p

$$A^2 = 4x(10^n - 1) = 4x \cdot 9x = 36x^2$$

2p

$$A = \sqrt{36x^2} = 6x = \underbrace{666 \dots 6}_{n \text{ cifre}}$$

1p

2. Fie M un punct în interiorul $\triangle ABC$. Punctele D, E, F sunt simetricele punctului M față de mijloacele laturilor AB, AC , respectiv BC . Arătați că:

a. $\triangle ABC \equiv \triangle FED$;

b. dreptele AF, BE și CD sunt concurente.

Soluție :

a. Notăm A', B' și C' mijloacele laturilor BC, AC respectiv AB .

$$C'A' \text{ linie mijlocie în } \triangle DMF \Rightarrow C'A' = \frac{DF}{2}$$

$$C'A' \text{ linie mijlocie în } \triangle ABC \Rightarrow C'A' = \frac{AC}{2}$$

$$\Rightarrow DF = AC.$$

$$\text{Analog } EF = AB, \text{ respectiv } ED = BC$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \equiv \triangle FED \text{ (L.L.L.)}$$

3p

b. $ACFD$ paralelogram $\Rightarrow AF \cap CD = \{L\} \Rightarrow$

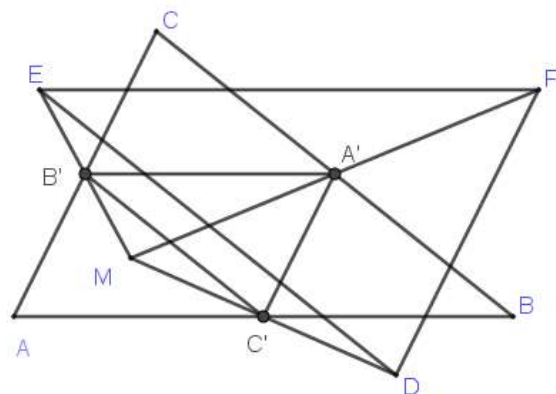
L mijlocul lui AF

2p

Analog $ABFE$ paralelogram $\Rightarrow AF \cap BE = \{L'\} \Rightarrow L'$ mijlocul lui AF

$$\Rightarrow L' = L.$$

2p



3. Determinați numerele reale x și y știind că

$$\begin{cases} x + x^3 = 2026y \\ y + y^3 = 2026x \end{cases}$$

Soluție :

$$\text{Dacă } x \leq y \Rightarrow x^3 \leq y^3$$

1p

$$\Rightarrow x + x^3 \leq y + y^3 \Rightarrow 2026y \leq 2026x \Rightarrow y \leq x$$

1p

$$\Rightarrow x = y$$

1p

$$x + x^3 = 2026x \Rightarrow 2025x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 2025) = 0$$

2p

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 45 \\ y = 45 \end{cases}; \begin{cases} x = -45 \\ y = -45 \end{cases}$$

2p