

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a VIII-a

1. Fie a, b, c, d numere pozitive. Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{a+c+d}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+d}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2$$

2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^4 + n^2 - 81}$ este număr natural.

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și V un punct care nu aparține planului (ABC) .

Notăm D, E, F mijloacele laturilor BC, CA , respectiv AB . Dacă $\angle DVA = \angle EVB = \angle FVC = 90^\circ$, demonstrați că $VABC$ este piramidă regulată.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a VIII-a
BAREM

1. Fie a, b, c, d numere pozitive. Demonstrați că:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{a+c+d}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+d}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

Soluție:

Din inegalitatea mediilor avem că

$$a+b+c+d \geq 2\sqrt{a(b+c+d)} \Rightarrow (a+b+c+d)^2 \geq 4a(b+c+d) \Rightarrow \frac{1}{b+c+d} \geq \frac{4a}{(a+b+c+d)^2}$$

.....3p

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c+d} \geq \frac{4a^2}{(a+b+c+d)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c+d}} \geq \frac{2a}{a+b+c+d} \text{ și analoagele.}$$

Adunând aceste inegalități obținem că

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{a+c+d}} + \sqrt{\frac{c}{a+b+d}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} \geq \frac{2a+2b+2c+2d}{a+b+c+d} = 2. \text{3p}$$

Are loc egalitate $\Leftrightarrow a=b+c+d$ și analoagele $\Rightarrow a+b+c+d=0$ (fals), deci inegalitatea este strictă.

.....1p

2. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care numărul $\sqrt{n^4 + n^2 - 81}$ este număr natural.

Soluție:

$$\sqrt{n^4 + n^2 - 81} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ cu } n^4 + n^2 - 81 = k^2 \Rightarrow 4n^4 + 4n^2 - 4k^2 = 324 \Rightarrow$$

$$(2n^2 + 1)^2 - 4k^2 = 325 \Leftrightarrow (2n^2 + 1 - 2k)(2n^2 + 1 + 2k) = 325. \text{3p}$$

$$2n^2 + 1 - 2k, 2n^2 + 1 + 2k \in \mathbb{N}, \text{ cu } 2n^2 + 1 - 2k \leq 2n^2 + 1 + 2k \text{ și } 325 = 5^2 \cdot 13 \text{1p}$$

Vom avea cazurile:

$$\text{I. } \begin{cases} 2n^2 + 1 - 2k = 1 \\ 2n^2 + 1 + 2k = 325 \end{cases} (+) \text{1p}$$

$$4n^2 + 2 = 326 \Rightarrow 4n^2 = 324 \Rightarrow n^2 = 81 \Rightarrow n = 9;$$

$$\text{II: } \begin{cases} 2n^2 + 1 - 2k = 5 \\ 2n^2 + 1 + 2k = 65 \end{cases} (+) \text{1p}$$

$$4n^2 + 2 = 70 \Rightarrow n^2 = 17 \text{ (fals);}$$

$$\text{III. } \begin{cases} 2n^2 + 1 - 2k = 13 \\ 2n^2 + 1 + 2k = 25 \end{cases} (+) \text{1p}$$

$$4n^2 + 2 = 38 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow n = 3.$$

3. Se consideră triunghiul echilateral ABC și V un punct care nu aparține planului (ABC) .

Notăm D, E, F mijloacele laturilor BC, CA , respectiv AB .

Dacă $\angle DVA = \angle EVB = \angle FVC = 90^\circ$, demonstrați că $VABC$ este piramidă regulată.

Soluție:

Notăm $AB = \ell$, $VA = a, VB = b, VC = c$.

Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, rezultă că

$$AD = BE = CF = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 1p$$

Dar $\triangle VAD$ este dreptunghic ($\angle V = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$AD^2 = VA^2 + VD^2$ și cum VD e mediană în $\triangle VBC$

$$\Rightarrow VD^2 = \frac{2(VC^2 + VB^2) - BC^2}{4} \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = a^2 + \frac{2(c^2 + b^2) - \ell^2}{4} \Leftrightarrow 2\ell^2 = 2a^2 + b^2 + c^2.$$

Analog se obține $2\ell^2 = a^2 + 2b^2 + c^2$ și $2\ell^2 = a^2 + b^2 + 2c^2$, de unde $a^2 = b^2 = c^2$ 3p

$\Rightarrow VA = VB = VC$, cum $\triangle ABC$ e echilateral $\Rightarrow VABC$ este piramidă regulată.1p

