

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea $abc = 1$. Demonstrați că $\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$.
2. Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{1+12n^2}$ este număr natural. Arătați că numărul $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ este pătrat perfect.
3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{E\}$. Dacă centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$, punctul O și centrul de greutate al triunghiului AOB aparțin unei drepte d , demonstrați că $E \in d$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a IX-a
BAREM

1. Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea $abc = 1$. Demonstrați că $\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$.

Soluție:

Din $abc = 1 \Rightarrow \exists x, y, z > 0$ cu $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$1p

$$M_s = \sum \left(\frac{\frac{x}{y}}{1 + \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}} \right)^2 = \sum \left(\frac{xz}{yz + xy} \right)^2. \dots\dots\dots 1p$$

$$M_s \geq \frac{\left(\sum \frac{xz}{xy + yz} \right)^2}{3} \stackrel{\text{Nesbitt}}{\geq} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^2}{3} = \frac{3}{4}. \dots\dots\dots 4p$$

Are loc egalitate $\Leftrightarrow xy = yz = zx \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = 1$1p

2. Fie $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{1+12n^2}$ este număr natural. Arătați că numărul $2 + 2\sqrt{1+12n^2}$ este pătrat perfect.

Soluție:

$\sqrt{1+12n^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N}$ cu $1+12n^2 = \ell^2$,
 atunci ℓ este număr impar $\Rightarrow \ell = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ 1p

și înlocuind obținem $3n^2 = k(k+1)$2p

Dar $k^2 + k$ este număr par $\Rightarrow 2|n$, deci $n = 2$ sau n este număr compus.....1p

I. Dacă $n = 2 \Rightarrow \sqrt{1+12n^2} = 7 \in \mathbb{N}$ și $2 + 2\sqrt{1+12n^2} = 16 = 4^2$, deci e pătrat perfect.....2p

II. Dacă n este compus, cum $(k, k+1) = 1, \forall k \in \mathbb{N}$, atunci $\exists a, b \in \mathbb{N}, (a, b) = 1$ astfel încât
 $k = a^2, k+1 = 3b^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 3b^2$ (fals), deoarece $a^2 \equiv 0$ sau $1 \pmod{3}$.

sau $k = 3a^2, k+1 = b^2 \Rightarrow b^2 = 3a^2 + 1$ și $n^2 = a^2b^2 = 3a^4 + a^2$, deci

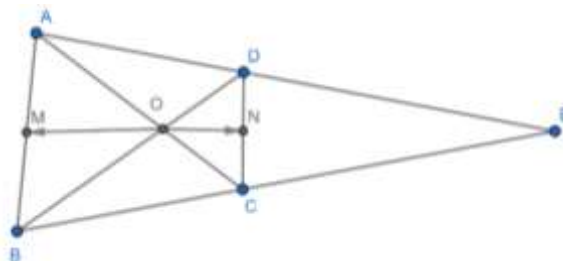
$$\sqrt{1+12n^2} = \sqrt{1+12a^2+36a^4} = 6a^2 + 1$$

Avem $2 + 2\sqrt{1+12n^2} = 12a^2 + 4 = 4(3a^2 + 1) = 4b^2$ care e pătrat perfect.1p

3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$ și $AD \cap BC = \{E\}$. Dacă centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$, punctul O și centrul de greutate al triunghiului AOB aparțin unei drepte d , demonstrați că $E \in d$.

Soluție:

Fie M și N mijloacele laturilor AB , respectiv DC . Atunci centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$ este mijlocul segmentului MN . Centrul de greutate al triunghiului AOB aparține segmentului OM și din coliniaritatea celor trei puncte din ipoteză rezultă că punctele O, M și N sunt coliniare și $d = MN$.



.....2p

Punctele A, O, C și B, O, D sunt coliniare, deci $\exists k, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{OC} = k\vec{OA}$, $\vec{OD} = p\vec{OB}$.

Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$, deci $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$,

$\vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(k\vec{OA} + p\vec{OB})$2p

Dar O, M, N sunt coliniare, deci vectorii $\vec{OM}$ și $\vec{ON}$ sunt coliniari, iar vectorii $\vec{OA}$ și $\vec{OB}$ sunt necoliniari, de unde rezultă că $k = p \Rightarrow \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} \xrightarrow{R.T.F.A} AB \parallel CD \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = x$

$\Rightarrow \vec{ED} = x\vec{EA}$, $\vec{EC} = x\vec{EB}$2p

Avem $\vec{EN} = \frac{1}{2}(\vec{ED} + \vec{EC}) = \frac{x}{2}(\vec{EA} + \vec{EB}) = x\vec{EM}$, deci $E \in MN \Rightarrow E \in d$1p