

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a X-a

1. Fie $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și

$$E(a, b, c) = \log_a(b^2 + c^2 - bc) + \log_b(c^2 + a^2 - ca) + \log_c(a^2 + b^2 - ab).$$

a. Determinați valoarea sumei

$$\frac{2}{-2 + \log_2 5} + E\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

b. Arătați că $E(a, b, c) \geq 6$, oricare ar fi $a, b, c \in (1, \infty)$.

2. Fie numărul real $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, numărul natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea

$$M = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0\}.$$

a. Arătați că dacă $z \in M$, atunci $\bar{z} \in M$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z .

b. Fie $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, 2n}$, soluțiile ecuației $x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0$. Determinați valoarea sumei

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x_k \cdot \bar{x}_k}.$$

(indicație: se poate folosi faptul că
pentru ecuația $z^{2n} + 1 = 0$, suma tuturor rădăcinilor este nulă.)

3. Fie m și n două numere naturale nenule de parități diferite.

Arătați că nu există funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să satisfacă simultan egalitățile

$$(f \circ g)(x) = x^m, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$(g \circ f)(x) = x^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Vasile Pop

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.

Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a X-a
BAREM

1. Fie $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și

$$E(a, b, c) = \log_a(b^2 + c^2 - bc) + \log_b(c^2 + a^2 - ca) + \log_c(a^2 + b^2 - ab).$$

a. Determinați valoarea sumei

$$\frac{2}{-2 + \log_2 5} + E\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

b. Arătați că $E(a, b, c) \geq 6$, oricare ar fi $a, b, c \in (1, \infty)$.

Soluție :

a. Pentru $a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ și $c = \frac{\sqrt{5}}{2}$ se obține

$$c^2 + a^2 - ca = b^2 + c^2 - bc = 1, \quad a^2 + b^2 - ab = \frac{1}{2}.$$

1 pct

Atunci

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) &= \log_{\frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\frac{\sqrt{5}}{2}} 2 = -\frac{1}{\log_2 \frac{\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{-1 + \log_2 \sqrt{5}} \\ &= -\frac{2}{-2 + \log_2 5}, \end{aligned}$$

deci

$$\frac{2}{-2 + \log_2 5} + E\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

2 pct

b. Pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem $a^2 + b^2 - ab \geq ab$, deci pentru orice $a, b, c \in (1, \infty)$ are loc inegalitatea $\log_c(a^2 + b^2 - ab) \geq \log_c a + \log_c b$.

În mod analog se obțin inegalitățile

$$\log_a(b^2 + c^2 - bc) \geq \log_a b + \log_a c \text{ și } \log_b(c^2 + a^2 - ca) \geq \log_b c + \log_b a$$

2 pct

Prin adunare, rezultă

$$E(a, b, c) \geq \log_a b + \log_b a + \log_b c + \log_c b + \log_c a + \log_a c \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

2 pct

2. Fie numărul real $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, numărul natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimea

$$M = \{x \in \mathbb{C} \mid x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0\}.$$

a. Arătați că dacă $z \in M$, atunci $\bar{z} \in M$, unde $\bar{z}$ este conjugatul numărului z .

b. Fie $x_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, 2n}$, soluțiile ecuației $x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0$. Determinați valoarea sumei

$$S = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x_k \cdot \bar{x}_k}.$$

Soluție :

a. Fie funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cu $f(z) = z^{2n} + (a \cdot z - 1)^{2n}$. Are loc egalitatea

$$\overline{f(z)} = \overline{z}^{2n} + (a \cdot \overline{z} - 1)^{2n} = f(\overline{z}) \quad 1 \text{ pct}$$

Pentru $z \in M$ avem $f(z) = 0$ și

$$0 = \overline{0} = \overline{f(z)}, \text{ deci } f(\overline{z}) = 0, \text{ de unde rezultă } \overline{z} \in M. \quad 1 \text{ pct}$$

b. Pentru orice $x \in \mathbb{C}^*$ are loc echivalența

$$x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{x}\right)^{2n} = -1 \quad 1 \text{ pct}$$

Fie $\omega \in \mathbb{C}^*$ o rădăcină a ecuației $z^{2n} + 1 = 0$, atunci

$$a - \frac{1}{x} = \omega \Leftrightarrow \frac{1}{x} = a - \omega. \quad 1 \text{ pct}$$

și

$$\frac{1}{x \cdot \bar{x}} = (a - \omega)(a - \bar{\omega}) = a^2 + 1 - a(\omega + \bar{\omega}). \quad 1 \text{ pct}$$

Fie $x_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 2n}$, soluțiile ecuației $x^{2n} + (ax - 1)^{2n} = 0$.

Avem

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{x_k \cdot \bar{x}_k} = \sum_{k=1}^{2n} [a^2 + 1 - a(\omega_k + \bar{\omega}_k)] \\ &= 2n(a^2 + 1) - a \sum_{k=1}^{2n} (\omega_k + \bar{\omega}_k) = 2n(a^2 + 1). \end{aligned} \quad 2 \text{ pct}$$

3. Fie m și n două numere naturale nenule de parități diferite.

Arătați că nu există funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să satisfacă simultan egalitățile

$$(f \circ g)(x) = x^m, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R},$$

$$(g \circ f)(x) = x^n, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Soluție:

Presupunem că există două funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să verifice egalitățile din ipoteză. Analizăm cazul în care m este par și n este impar (analog cealaltă situație).

Cum funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $h(x) = x^n$ este bijectivă,

deduce că funcția f este injectivă. 1 pct

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile

$$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(f(x)) = (f(x))^m$$

$$(f \circ g \circ f)(x) = f(g \circ f)(x) = f(x^n)$$

deci

$$(f(x))^m = f(x^n), \forall x \in \mathbb{R} \quad 3 \text{ pct}$$

Dacă $\alpha = f(0)$, atunci $\alpha^m = \alpha$

Dacă $\beta = f(1)$, atunci $\beta^m = \beta$

Dacă $\gamma = f(-1)$, atunci $\gamma^m = \gamma$

Deci α, β și γ sunt soluții ale ecuației $x^m = x$,

ecuație cu mulțimea soluțiilor $S = \{0, 1\}$.

Atunci numerele α, β și γ nu pot fi distincte două câte două, ceea ce vine în contradicție cu injectivitatea funcției f . 2 pct

Presupunerea inițială este falsă, deci nu există două funcții $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să verifice simultan egalitățile din ipoteză 1 pct