

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a XI-a

1. Fie matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și mulțimea

$$M(X) = \{Y \in M_3(\mathbb{R}) \mid XY = YX, \det(Y + iX) = \det(Y - iX) = 0\}.$$

a. Arătați că mulțimea $M(I_3)$ este nevidă (prin I_3 s-a notat matricea unitate de ordinul trei).

b. Arătați că dacă există $A \in M(X)$ și $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ astfel încât $\det(A) = \det(\alpha X)$, atunci

$$\frac{\det(A + X)}{\det(A - X)} = \frac{\det(A) + \det(X)}{\det(A) - \det(X)}.$$

2. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_0 > 0$ și

$$x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_{n+1}}}, n \in \mathbb{N}.$$

a. Arătați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

b. Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 x_n^4$.

3. Determinați matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care are loc egalitatea

$$X^5 + X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a XI-a
BAREM

1. Fie matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și mulțimea

$$M(X) = \{Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid XY = YX, \det(Y + iX) = \det(Y - iX) = 0\}.$$

a. Arătați că mulțimea $M(I_3)$ este nevidă (prin I_3 s-a notat matricea unitate de ordinul trei).

b. Arătați că dacă există $A \in M(X)$ și $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ astfel încât $\det(A) = \det(\alpha X)$, atunci

$$\frac{\det(A + X)}{\det(A - X)} = \frac{\det(A) + \det(X)}{\det(A) - \det(X)}.$$

Soluție :

a. Pentru a determina un element al mulțimii $M(I_3)$, cum orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ comută cu matricea unitate I_3 este suficient să fie îndeplinită condiția

$$\det(A + iI_3) = \det(A - iI_3) = 0$$

care implică $\det(A^2 + I_3) = 0$, adică $\lambda = -1$ este valoare proprie a matricei A^2 . Atunci matricea A trebuie să aibă valorile proprii $\lambda_1 = i$ și $\lambda_2 = -i$.

În concluzie, orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care are valorile proprii $\lambda_1 = i$ și $\lambda_2 = -i$, este un element al mulțimii $M(I_3)$, de exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 pct

b.

Din $\det(A) = \det(\alpha X) = \alpha^3 \cdot \det(X)$ se obține

$$\frac{\det(A) + \det(X)}{\det(A) - \det(X)} = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^3 - 1}.$$

1 pct

Fie $f(t) = \det(A + tX)$, unde $t \in \mathbb{C}$.

Atunci $f(i) = f(-i) = 0$

1 pct

Cum $f(t) = t^3 \cdot \det(X) + m \cdot t^2 + n \cdot t + \det(A)$,

rezultă $m = \det(A)$, $n = \det(X)$

$$f(t) = (t^2 + 1)(t + \alpha^3) \cdot \det(X)$$

1 pct

Atunci

$$\begin{aligned} f(1) &= \det(A + X) = 2(1 + \alpha^3) \cdot \det(X) \\ f(-1) &= \det(A - X) = 2(-1 + \alpha^3) \cdot \det(X) \end{aligned}$$

1 pct

deci

$$\frac{\det(A + X)}{\det(A - X)} = \frac{f(1)}{f(-1)} = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^3 - 1}.$$

1 pct

În concluzie, are loc egalitatea

$$\frac{\det(A + X)}{\det(A - X)} = \frac{\det(A) + \det(X)}{\det(A) - \det(X)} = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^3 - 1}.$$

2. Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_0 > 0$ şi

$$x_n + \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_{n+1}}}, n \in \mathbb{N}.$$

a. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

b. Calculaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 x_n^4$.

Soluţie :

a.

Se arată că $x_n > 0, n \in \mathbb{N}$.

1 pct

Din $\frac{1}{\sqrt[3]{x_{n+1}}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x_n}} > 0$ se deduce $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător.

1 pct

Cum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este strict descrescător şi mărginit inferior, rezultă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

1 pct

b. Avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 x_n^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\frac{1}{x_n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt[3]{\frac{1}{x_n^4}}} \right)^3.$$

1 pct

Avem

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{\frac{1}{x_n^4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x_{n+1}^4} - \sqrt[3]{\frac{1}{x_n^4}}}}.$$

1 pct

Se obţine $L = \frac{1}{4}$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 x_n^4 = \frac{1}{4^3}.$$

2 pct

3. Determinaţi matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care are loc egalitatea

$$X^5 + X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluţie :

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Din $X^6 + X^2 = AX = XA$

1 pct

se deduce $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2 pct

Ecuţia revine la

$$\begin{pmatrix} a^5 + a & 5ba^4 + b \\ 0 & a^5 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 pct

se obţine

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 pct