

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu un număr finit de elemente și funcția injectivă $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f\left(f\left(x \cdot y^{-1}\right) \cdot y\right)=x^{-1} \cdot f\left(x \cdot y^{-1}\right), \forall x, y \in G$, unde prin x^{-1} s-a notat simetricul elementului x în grupul $(G, \cdot)$.

Arătați că:

- a. $f(x)=x^{-1}, \forall x \in G$;
- b. $x^3=e, \forall x \in G$;
- c. mulțimea G are un număr impar de elemente.

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și F o primitivă a sa, cu proprietatea că

$$e^{3x-F(x)}=F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că funcția f este derivabilă și calculați $\lim _{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

3. Determinați funcția $f:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(1)=0$, care admite o primitivă $F:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $F(xy)+xy=xy(f(x)+f(y)), \forall x, y \in(0, \infty)$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XV-a 2025,
 Târgu Lăpuș, 01.09.2025-06.09.2025
Clasa a XII-a
BAREM

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu un număr finit de elemente și funcția injectivă $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(f(x \cdot y^{-1}) \cdot y) = x^{-1} \cdot f(x \cdot y^{-1}), \forall x, y \in G$, unde prin x^{-1} s-a notat simetricul elementului x în grupul $(G, \cdot)$.

Arătați că:

- a. $f(x) = x^{-1}, \forall x \in G$;
- b. $x^3 = e, \forall x \in G$;
- c. mulțimea G are un număr impar de elemente.

Soluție:

a. În relația din ipoteză:

Pentru $x = y = e$, obținem: $f(f(e)) = f(e)$ și cum f este injectivă, obținem $f(e) = e$ **2p**

Pentru $x = y$, obținem $f(x) = x^{-1}, \forall x \in G$ **1p**

b. Din $f(x) = x^{-1}, \forall x \in G$ se obține $f(xy^{-1}) = (xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} = x^{-1}y$

Relația din ipoteză devine $x^3y^{-3} = e, \forall x, y \in G$

Pentru $y = e \Rightarrow x^3 = e, \forall x \in G$ **2p**

c. Dacă $G = \{e\} \Rightarrow \text{card}(G) = 1$ (număr impar)

Dacă există $x \in G, x \neq e$, atunci

avem $x^2 \neq e$ (altfel, dacă $x^2 = e \Rightarrow x = x^3 = e$, fals)

și $x^2 \neq x$ (altfel, dacă $x^2 = x \Rightarrow x^2 = x^3 = e$, fals)

Deci $G = \{e, x, x^2, y, y^2, \dots\}$, așadar G are un număr impar de elemente. **2p**

2. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă și F o primitivă a sa, cu proprietatea că

$$e^{3x-F(x)} = F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Arătați că funcția f este derivabilă și calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}}$.

Soluție:

Din ipoteză avem $f(x) = F'(x) = e^{3x-F(x)} \cdot (3 - f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. (1)

Din (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{3e^{3x-F(x)}}{1 + e^{3x-F(x)}}, \forall x \in \mathbb{R}$,

deci f este derivabilă (operații cu funcții derivabile). **4p**

Din (1) $\Rightarrow f(x)(3 - f(x)) = e^{3x-F(x)} \cdot (3 - f(x))^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in [0, 3], \forall x \in \mathbb{R}$ **2p**

Deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = 0$ **1p**

3. Determinați funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(1) = 0$, care admite o primitivă $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $F(xy) + xy = xy(f(x) + f(y))$, $\forall x, y \in (0, \infty)$.

Soluție:

Pentru $y = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{F(x)}{x} + 1 - f(1)$,

de unde obținem că f este derivabilă.2p

Derivând relația $F(x) = x(f(x) + f(1)) - x$, (1)

obținem $f'(x) = \frac{1 - f(1)}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, \infty)$2p

Deci $f(x) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Cum $f(1) = 0$ avem $c = 0 \Rightarrow f(x) = \ln x$, $\forall x \in (0, \infty)$1p

Din relația (1) $\Rightarrow F(x) = x \ln x - x$, $\forall x \in (0, \infty)$.

Funcțiile f și F determinate verifică relația din ipoteză.2p